

Физические модели в системе осциллирующих рассеивателей под действием силы тяжести

Вакшин Александр, Рукавица Артём

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК

Сентябрь-декабрь 2024

1 О демонстрации

Данная демонстрация объединяет три ключевые физические модели в системе осциллирующих рассеивателей под действием гравитационного поля: доску Гальтона, газ Лоренца и распределение Больцмана.

Пользователь может автоматически настроить параметры для воспроизведения этих моделей в их классическом виде при помощи кнопок «Доска Гальтона», «Газ Лоренца» и «Распр. Больцмана» или самостоятельно задать значения для изучения переходных процессов и иных физических явлений.

На главном экране расположены кнопки перехода в разделы «Модель», «Авторы» и «Теория», кнопка выхода из программы, а также переключение интерфейса программы на английский язык.



Рис. 1: Стартовый экран демонстрации

Раздел «Теория» представляет собой файл с подробным теоретическим материалом по данной теме, а также инструкцию по работе с демонстрацией.

Раздел «Авторы» содержит информацию о команде исполнителей и их научном руководителе.

Раздел «Модель» представляет собой окно демонстрации с нижеописанным функционалом.

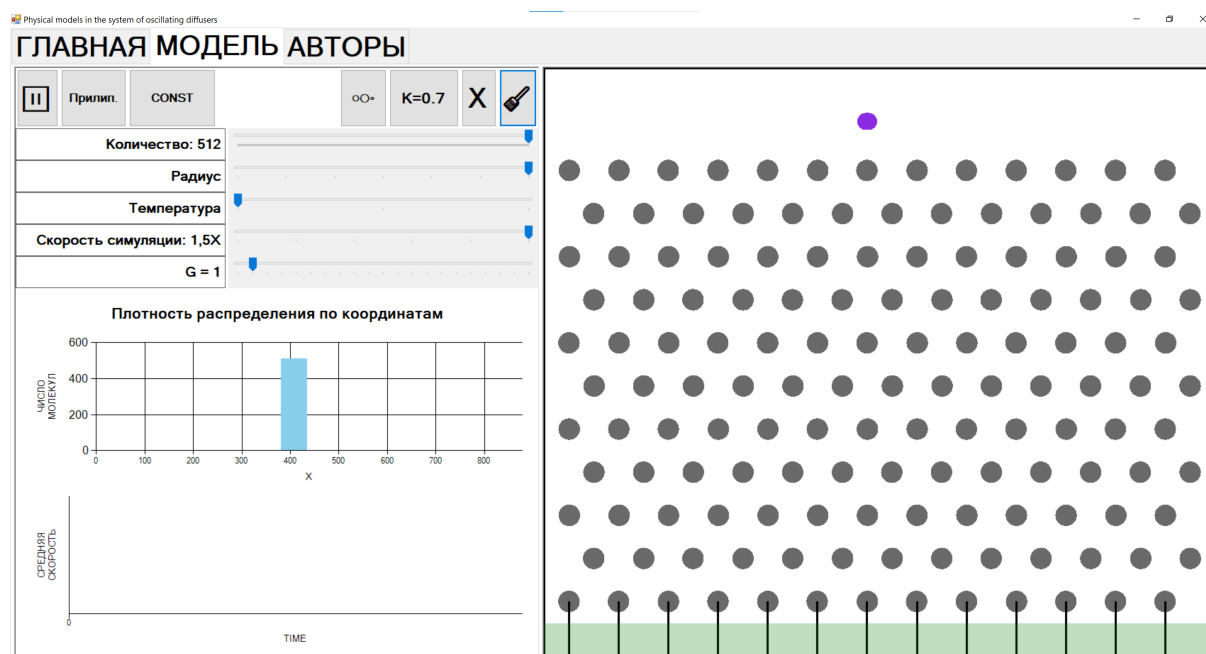


Рис. 2: Стартовый экран демонстрации в режиме «Доска Гальтона»

В данной программе реализован следующий функционал:

1. Кнопка «Пауза» — пауза/воспроизведение симуляции;
2. Кнопка «Отскок» — режимы «Отскок» и «Прилипание», абсолютно упругое соударение частиц со дном сосуда или прилипание к нему;
3. Кнопка «CONST» — режимы «CONST» и «Осцилляция», штыри-рассеиватели покоятся или осциллируют (осцилляция реализована путем изменения радиуса рассеивателей);
4. Кнопка «Три круга» — режимы осцилляции рассеивателей со стохастическими колебаниями (равномерно распределенные фазы) и с гармоническими колебаниями (одинаковые фазы);
5. Кнопка «K=1.0» — коэффициент упругости соударения с рассеивателями (принимает значения 1.0 или 0.7);
6. Кнопка «X» — отображение распределения частиц по оси координат X или Y;
7. Кнопка «Метла» — сброс текущих значений параметров;
8. Параметр «Количество» — количество молекул (от 0 до 512);
9. Параметр «Радиус» — радиус молекул;

10. Параметр «Температура» — температура молекул;
11. Параметр «Скорость симуляции» — скорость расчета (от 0.25x до 1.5x);
12. Параметр «G» — ускорение свободного падения (от 0 до 20);
13. График распределения частиц по оси координат X или Y;
14. График средней скорости частиц с течением времени.

Двойной щелчок любой кнопки мыши на поле с демонстрацией проекта дает возможность создать новую частицу другого цвета в произвольном месте выбранных массы и радиуса.

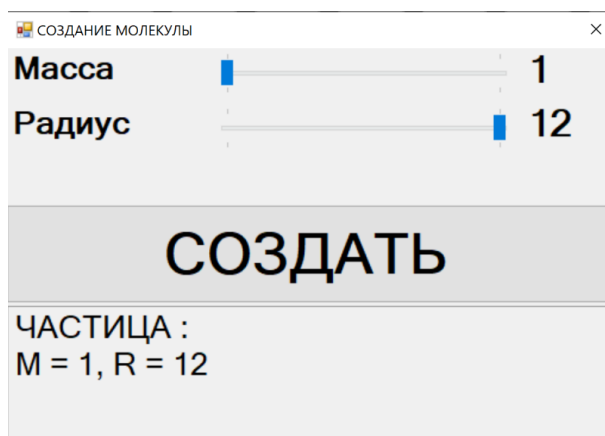


Рис. 3: Меню создания новой молекулы

2 Доска Гальтона и газ Лоренца

В классическом понимании **доска Гальтона**¹ — это коробка с n параллельными рядами штырей, расположенных так, как показано на рис. 4. Ряды имеют номера с 0-го по $(n-1)$ -й, штыри в k -м ряду нумеруются с 0-го по k -й. Внизу находятся ячейки. На самый верхний штырь падает шарик. Конструкция доски Гальтона такова, что шарик, ударившись о штырь, может с равной вероятностью оказаться как справа, так и слева от него. Пройдя n рядов, шарик попадает в одну из ячеек.

¹Доска Гальтона — устройство, изобретённое английским учёным Фрэнсисом Гальтоном (первый экземпляр изготовлен в 1873 году) и предназначенное для демонстрации центральной предельной теоремы.

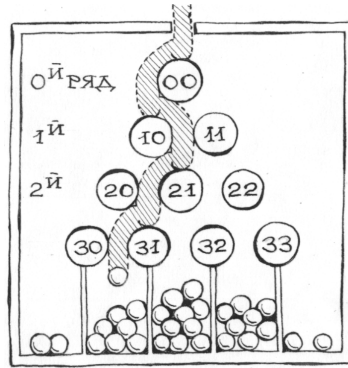


Рис. 4: Классическая доска Гальтона

Наша демонстрация отличается от классической постановки доски Гальтона тем, что в каждом ряду расположено одинаковое количество штырей в шахматном порядке.

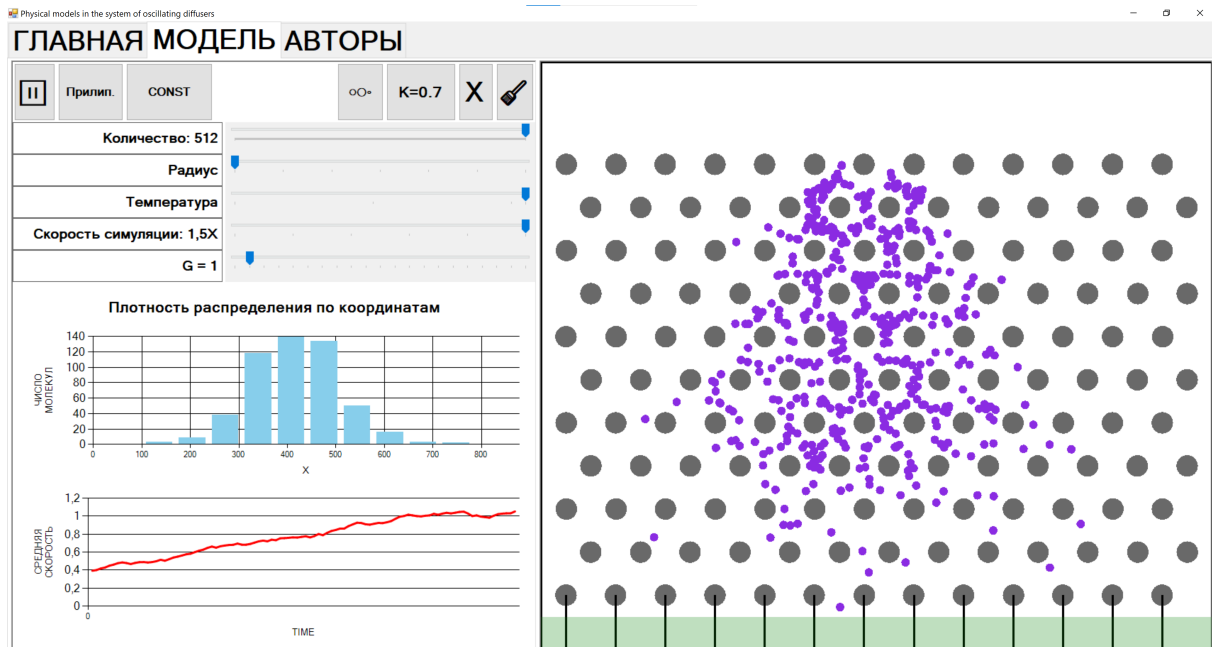


Рис. 5: Доска Гальтона в нашей демонстрации

Вычислим функцию распределения вероятности попадания шарика в классической доске Гальтона. Для этого найдем все возможные попарно несовместные варианты движения шарика вниз по доске Гальтона. Каждый такой вариант, определяющий попадание шарика на тот или иной штырь доски, в дальнейшем будем называть микросостоянием шарика.

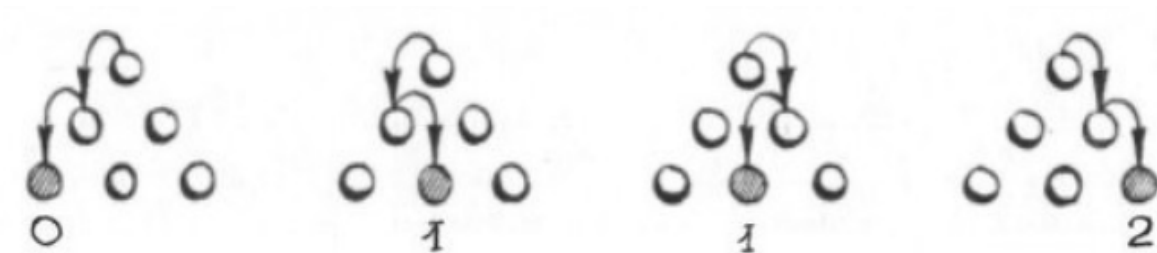


Рис. 6: Микросостояния шарика

На рис. 6 показаны четыре возможных микросостояния шарика при прохождении доски с тремя рядами штырей. Если увеличивать n , то числа микросостояний, определяющие количество попаданий на штырь с номером j ($0 \leq j \leq i$) в ряду с номером i , образуют треугольник Паскаля, в котором, как известно, в i -м ряду на j -м месте стоит

$$C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}.$$

Попасть в i -й ряд шарик может 2^i способами, так как после любого штыря он имеет две возможности движения: направо и налево. Вероятность его попадания на штырь с номером j в i -м ряду $P_i(j)$ находится с помощью формулы вероятности события (напомним, что вероятностью события A называют отношение числа m , соответствующих этому событию реализаций, к полному числу n возможно попарно несовместных равновероятных реализаций: $P(A) = \frac{m}{n}$):

$$P_i(j) = \frac{C_i^j}{2^i}$$

Вероятности попадания шарика в ячейки доски Гальтона равны вероятностям его попадания на штыри следующего ряда, которому естественно было бы присвоить номер n , дополнив им уже имеющиеся n рядов.

Итак, функция распределения вероятности попадания шарика в ячейки $P_n(k)$ имеет вид:

$$P_n(k) = \frac{C_n^k}{2^n}$$

Это функция вероятности биномиального распределения, которое в соответствии с центральной предельной теоремой при достаточно большом n аппроксимирует нормальное распределение.

Запустив симуляцию в режиме «Прилипание» и «CONST» с коэффициентом упругости $K = 0.7$ при нулевой температуре, получим модель доски Гальтона с аппроксимацией нормального распределения по оси X. Для наглядности и наиболее точного построения графика рекомендуется проводить симуляцию с максимальным числом частиц большого радиуса.

Отметим, что данная программа является лишь приближением идеальной математической модели. Одним из проявлений физической реалистичности можно считать покидание некоторыми частицами треугольника Паскаля - это происходит в

силу сохранения горизонтальной компоненты их скорости из-за отсутствия трения между частицами и рассеивателями. Для минимизации этого эффекта рекомендуется запускать программу с параметром $G = 1$.

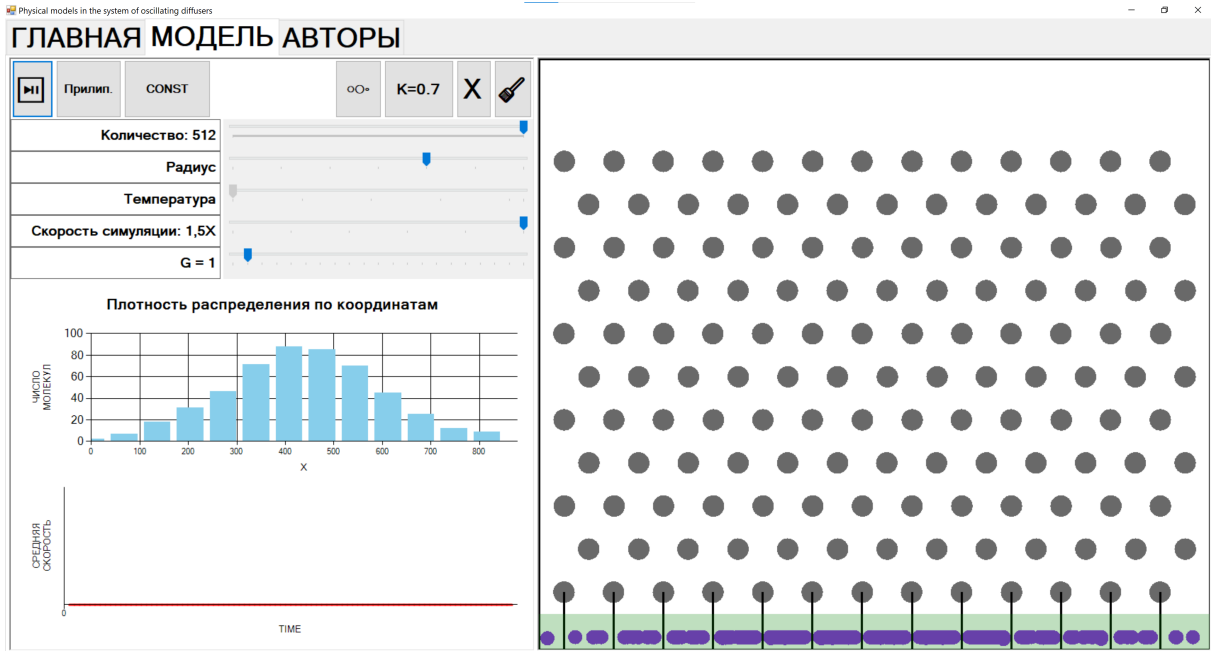


Рис. 7: Аппроксимация распределения молекул по оси X нормальным законом при большом n

Помимо аппроксимации нормальным законом, наша программа демонстрирует одномерные дискретные марковские блуждания вдоль оси X . Для простоты будем характеризовать положение броуновской частицы одной координатой — проекцией на ось X . Тогда в начальный момент времени частица имеет координату x , равную x_0 , в момент времени Δt — x_1 и так далее. Обозначим

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots \quad (2.1)$$

Перемещение частицы — это случайная величина, поэтому естественно интересоваться средним отклонением броуновской частицы от начального положения $\langle x(t) - x_0 \rangle$. Разбивая весь путь, пройденный частицей за время t , на элементарные пути, т.е. учитывая (2.1), получим

$$\langle x(t) - x_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^N \langle \Delta x_i \rangle \quad (2.2)$$

На каждом интервале времени Δt_i частица с одинаковой вероятностью движется и вправо, и влево, следовательно, из соображений симметрии

$$\langle \Delta x_i \rangle = 0, \quad (2.3)$$

и

$$\langle x(t) - x_0 \rangle = 0.$$

Найдем средний квадрат отклонения частицы от начального положения $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle$. Квадратный корень из этой величины характеризует среднее отклонение броуновской частицы от начального положения:

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^N \Delta x_i \right]^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta x_i \Delta x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle \quad (2.4)$$

Так как удары молекул о броуновскую частицу следуют независимо друг от друга, приращения Δx_i на различных интервалах времени Δt_i независимы, поэтому

$$\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle, i \neq j.$$

В силу равенства (2.3) имеем

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \Delta x_i^2 \rangle.$$

Так как температура и другие условия во всех точках одинаковы, а также одинаковы все интервалы времени, то $\langle \Delta x_i^2 \rangle = \langle \Delta x_1^2 \rangle$, и поэтому $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = N \langle \Delta x_1^2 \rangle$. Напомним, что $N = \frac{t}{\Delta t}$, поэтому

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \frac{\langle \Delta x_i^2 \rangle}{\Delta t} t = 2Dt,$$

где $D = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta x_i^2 \rangle}{\Delta t}$ — коэффициент диффузии.

Каждый штырь может либо находиться в покое, либо осциллировать; во втором случае задача превращается в подобие газа Лоренца, поэтому нашу демонстрацию можно рассматривать как бильярдную систему (с учетом силы тяжести).

Газом Лоренца называется динамическая система, которая описывает поведение счетного числа частиц, свободно движущихся между сферическими рассеивателями, от которых частицы отражаются по закону упругого удара (тангенциальная составляющая остаётся неизменной, а нормальная меняет знак).

Запустив симуляцию в режиме «Отскок» и «Осцилляция» с коэффициентом упругости $K = 1.0$ при максимальной температуре и $G = 0$, получим модель газа Лоренца, в которой частицы разгоняются с ускорением Ферми. Для наглядности рекомендуется проводить симуляцию со умеренным числом частиц среднего радиуса.

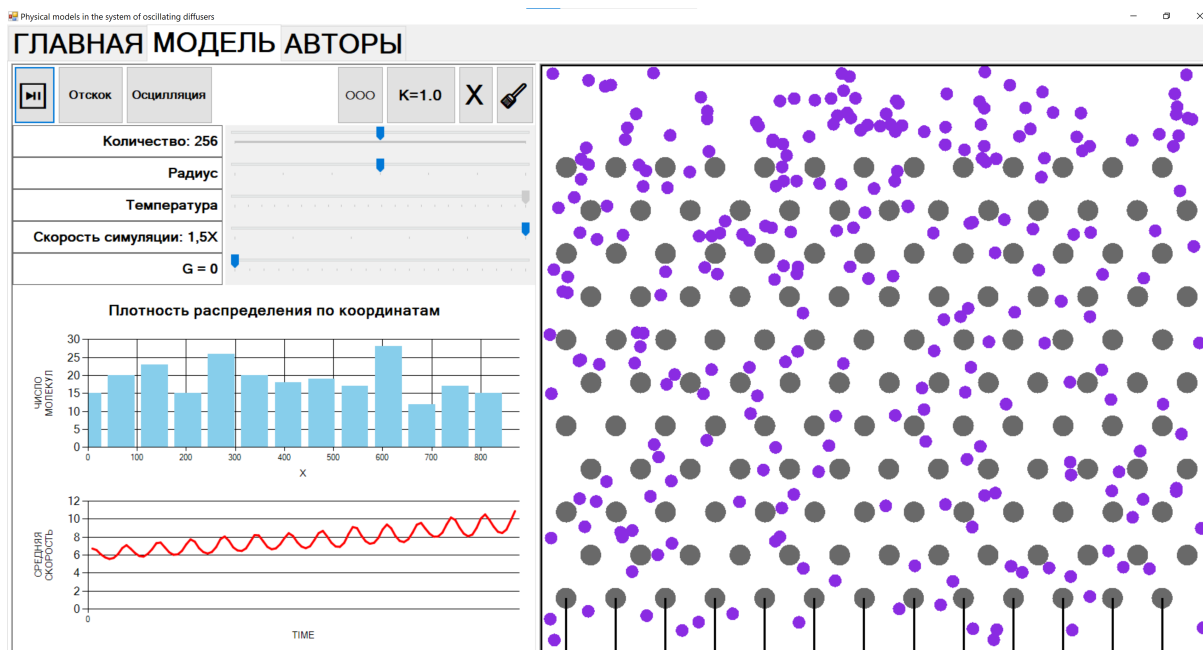


Рис. 8: Газ Лоренца в случае гармонических колебаний рассеивателей

В программе реализованы два вида осцилляции рассеивателей, которые можно переключать в процессе демонстрации: с хаотическими равномерно распределенными фазами (кнопка с тремя различными кругами, стохастические колебания) и с одинаковыми фазами (кнопка с тремя одинаковыми кругами, гармонические колебания). Как можно видеть из рис. 8 и рис. 9, в этих режимах средняя скорость изменяется по-разному (обоснование этому факту см. раздел 4).

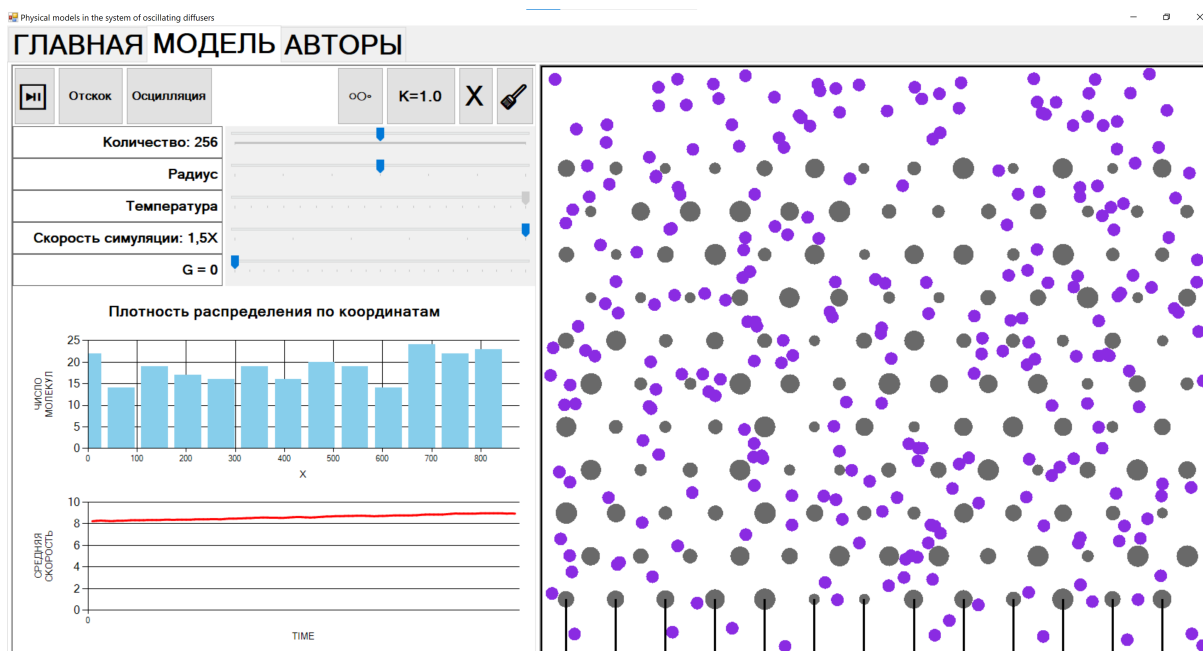


Рис. 9: Газ Лоренца в случае стохастических колебаний рассеивателей

В модели Лоренца считается, что молекулы одного компонента значительно легче

молекул другого компонента. Кроме того, предполагается, что концентрация легкого компонента много меньше тяжелого; это позволяет пренебречь столкновениями между легкими молекулами. Лоренц надеялся использовать свою модель для описания электронов в твердом теле, но для этой цели она оказалась непригодной из-за дальнедействующего характера кулоновского взаимодействия и существенного влияния квантовых эффектов. Однако благодаря тому, что модель Лоренца допускает точное решение, она может быть использована в качестве эталона, т. е. критерия для проверки приближенных методов. Кроме того, для некоторых физически интересных случаев можно построить теорию возмущений, используя в качестве первого приближения газ Лоренца.

Применения и значимость:

1. **Электропроводность в металлах.** Изначально модель была предложена для объяснения движения электронов в кристаллической решетке металла. Она помогает понять, как свободные электроны рассеиваются на ионах решетки, влияя на электрическую проводимость материала.
2. **Теплопроводность.** Газ Лоренца также используется для изучения переноса тепла за счет движения частиц и их взаимодействия с решеткой.
3. **Диффузионные процессы.** Газ Лоренца позволяет исследовать диффузию на микроскопическом уровне, связывая микроскопические законы движения с макроскопическими коэффициентами диффузии.

За счет ускорения Ферми, со временем частицы разгоняются до скоростей, недоступных для обработки. В связи с этим, в демонстрации существует ограничение на возрастание скорости: демонстрация принудительно останавливается, если средняя скорость всех частиц превышает 50 или если скорость одной частицы превысила 300.



Рис. 10: Принудительная остановка модели газа Лоренца с одинаковыми фазами

3 Распределение Больцмана

Рассмотрим идеальный газ, на каждую молекулу которого действует внешняя потенциальная сила, и будем интересоваться зависимостью плотности газа от координат.

Для простоты выберем одномерный случай, т.е. предположим, что внешняя сила, действующая на каждую молекулу, а также плотность газа зависят только от одной координаты, например, y , и сила направлена вдоль этой координаты. Это означает, что на плоскостях $y = \text{const}$ сила постоянна.

Выберем слой газа толщиной Δy и площадью S и рассмотрим, какие силы действуют на него (рис. 12). Объем этого слоя равен $V = S \cdot \Delta y$. На нижнюю границу слоя действует сила давления, направленная вверх,

$$F_1 = p(y) \cdot S,$$

на верхнюю – сила давления, направленная вниз,

$$F_2 = -p(y + \Delta y) \cdot S.$$

Здесь минус указывает, что эта сила направлена вниз.

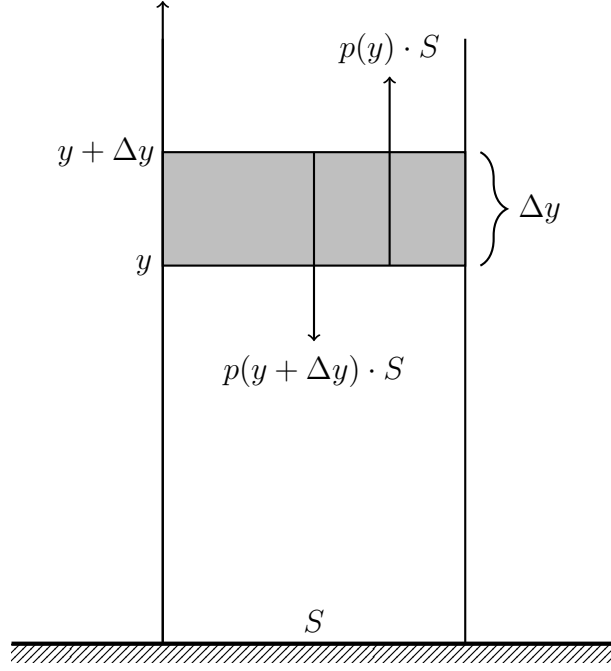


Рис. 11: Сосуд с поршнем

Пусть внешняя сила, действующая на одну молекулу газа, равна $f_1(y)$, а число частиц в единице объема газа на высоте y равно $n(y)$. Тогда проекция внешней силы, действующей на выбранный нами слой газа, на ось y равна

$$F_2 = f_1(y)n(y)V = f_1(y)n(y)S\Delta y.$$

Так как слой не движется, сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0,$$

или, если подставить вместо F_i указанные выражения, получим:

$$f_1(y)n(y)S\Delta y + p(y)S - p(y + \Delta y)S = 0 \quad (3.1)$$

Сокращая на S и разлагая $p(y + \Delta y)$ в ряд Тейлора, получим

$$\Delta x f_1(y)n(y)S - \frac{dp}{dy}(y)\Delta y = 0 \quad (3.2)$$

Сила $f_1(y)$ может быть задана формулой

$$f_1(y) = -\frac{d\Pi}{dy}(y), \quad (3.3)$$

где $\Pi(y)$ - потенциальная энергия одной частицы. Подставляя (3.2) и (3.3) и используя уравнение Клайперона-Менделеева в виде $p = nkT$, получим

$$-n \frac{d\Pi}{dy} = \frac{dn}{dy}kT, \quad \text{или} \quad \frac{dn}{n} = -\frac{1}{kT}d\Pi. \quad (3.4)$$

Интегрируя, приходим к уравнению

$$\ln n(y) = -\frac{1}{kT}d\Pi(y) + C'$$

или

$$n(y) = Ce^{-\frac{\Pi(y)}{kT}}. \quad (3.5)$$

Как известно из механики, потенциальная энергия $\Pi(y)$ задается с точностью до некоторой постоянной, от которой зависит константа интегрирования C . Пусть плоскости $y = 0$ соответствует дно некоторого полубесконечного или ограниченного сосуда. Удобно положить потенциальную энергию равной нулю на границе $y = 0$, т.е. $\Pi(0) = 0$. Тогда константа интегрирования в выражении (3.5) будет равна плотности частиц на дне сосуда: $C = n(0)$ и формула (3.5) окончательно примет вид

$$n(y) = n(0)e^{-\frac{\Pi(y)}{kT}}. \quad (3.6)$$

Графики распределений при потенциальной энергии, задаваемой формулой $\Pi(y) = mgy$, и переменной T имеют следующий вид:

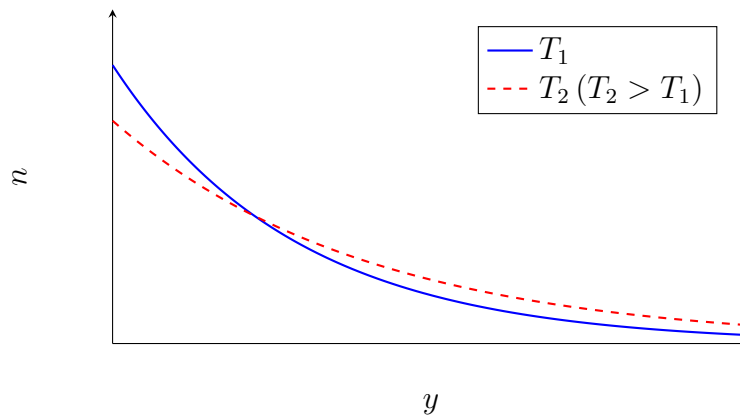


Рис. 12: Графики распределения Больцмана

Запустив симуляцию в режиме «Отскок» и «CONST» с коэффициентом упругости $K = 1.0$ при максимальной температуре и $G = 17$, можно получить распределение Больцмана по оси Y , похожее на красный график, путем незначительного уменьшения температуры. Отметим, что установление распределения может занять некоторое время, для наглядности рекомендуется задавать максимальное число частиц малого радиуса.

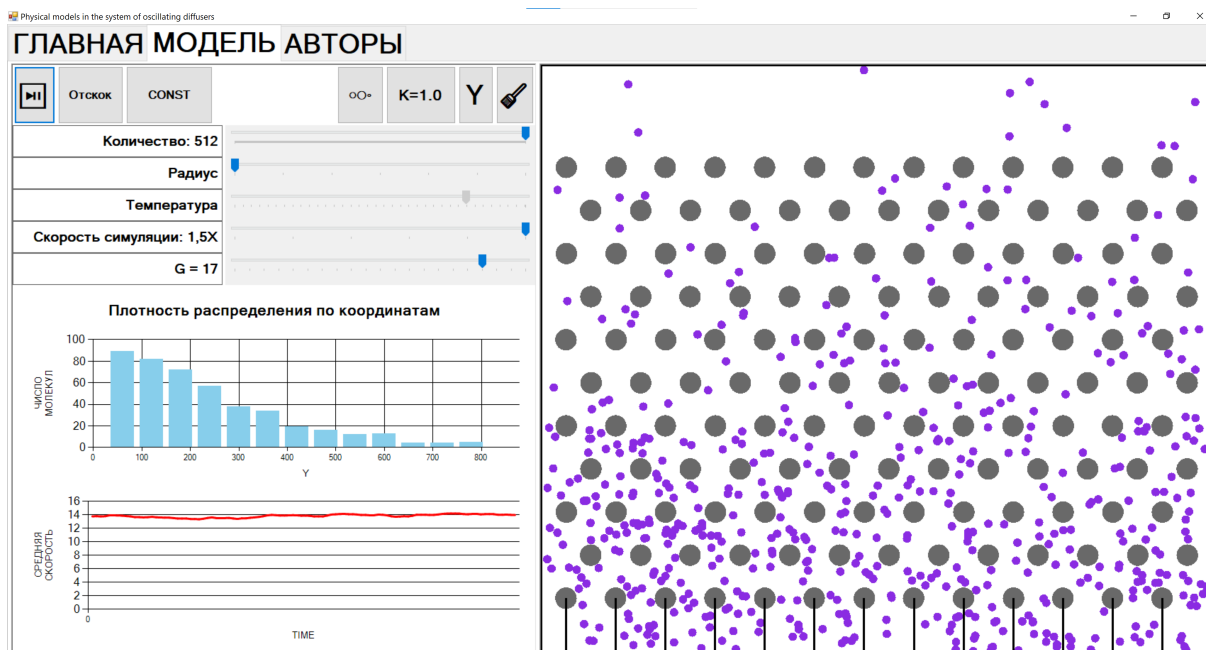


Рис. 13: Модель распределения Больцмана в нашей демонстрации

Теперь, существенно уменьшив температуру, можно получить более стремительную экспоненциальную зависимость, соответствующую синему графику.

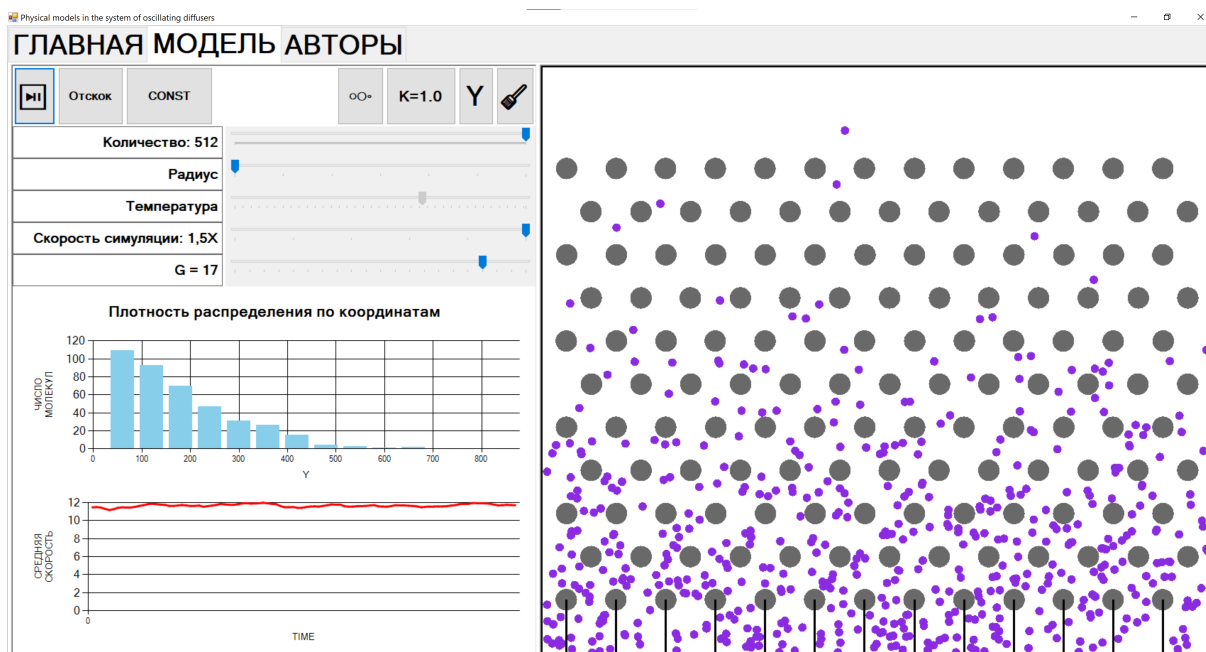


Рис. 14: Экспоненциальная зависимость

4 Ускорение Ферми в бильярдных системах

Бильярд — динамическая система, отвечающая свободному движению материальной точки (бильярдного шара) внутри области площадью Ω с кусочно-гладкой границей.

При достижении границы частица упруго отражается от нее по закону «угол падения равен углу отражения».

Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых могут двигаться с течением времени. Когда граница бильярда осциллирует, частица сталкивается как со стенками, которые движутся в ту же сторону, так и с теми, которые движутся навстречу. Суммарный эффект этих замедляющих и ускоряющих соударений приводит к неограниченному линейному росту средней скорости частицы, называемому **ускорением Ферми**².

Этот механизм был предложен Энрико Ферми для объяснения ускорения частиц космической пыли магнитными облаками, а также успешно применяется для объяснения возникновения сверхбыстрых (до сотен и тысяч электронвольт) электронов в плазме, для которой средняя энергия электронов достигает нескольких электронвольт. Электрон набирает кинетическую энергию при соударениях с магнитными островками.

Бильярды широко применяются для моделирования различных процессов переноса (в частности, диффузии). Удобной для этих задач разновидностью бильярда является периодический газ Лоренца – система, содержащая набор тяжелых дисков (штырей, рассеивателей) радиусом R , расположенных в ячейках периодической решетки с периодом a . Частица может свободно двигаться в пространстве между этими дисками. Бильярдным столом в нашей конфигурации является вся плоскость за исключением рассеивателей. Поскольку частицы не взаимодействуют между собой, то для анализа динамики такой системы достаточно рассмотреть только одну частицу. Можно рассматривать газ Лоренца, в котором границы рассеивателей движутся по какому-то закону (в нашем случае радиус рассеивателей меняется с постоянной скоростью).

В зависимости от соотношения радиуса рассеивателей и периода решетки можно выделить три типа газа Лоренца:

1. с ограниченным горизонтом, когда частица находится в одной ячейке и не может перейти в соседнюю;
2. с открытым горизонтом, когда такой переход возможен, но исключены бесконечно длинные пробеги частицы
3. с бесконечным горизонтом, когда такие пробеги возможны, в этом случае средняя длина свободного пробега не определена.

Плотность распределения вероятностей будет равномерной на всем объеме фазо-

²Энрико Ферми (1901-1954), итальянский и американский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии по физике (1938). Наиболее известный благодаря созданию первого в мире ядерного реактора, внёсший большой вклад в развитие ядерной физики, физики элементарных частиц, квантовой и статистической механики. Один из «отцов атомной бомбы» наряду с Робертом Оппенгеймером и Альбертом Эйнштейном.

вого пространства и равной единице, деленой на этот объем.

$$w(x, y, \phi) = \frac{1}{2\pi\Omega},$$

где Ω - площадь бильярда, то есть той области, где движется частица.

Вычислим длину свободного пробега в бильярде с открытым и ограниченным горизонтом. Вероятность столкновения частицы, летящей под углом ϕ к стенке, с участком стенки длиной L за единицу времени определяется интегралом вдоль этого участка от вероятности того, что частица окажется рядом со стенкой, умноженной на проекцию скорости на перпендикуляр к этой стенке

$$p(L) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_L dl w(x, y, \phi) v \cos(\phi) = \frac{Lv}{\pi\Omega}.$$

Тогда вероятность столкновения с любой стенкой под любым углом будет определяться периметром P и интегралом по углам

$$p(P) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(P, \phi) d\phi = \frac{Pv}{\pi\Omega}.$$

Мы получили частоту соударений частицы со стенками. Она, естественно, будет больше при большом периметре, большой скорости и малой площади бильярда. Обратная ей величина p^{-1} будет временем свободного пробега. Если это время умножить на скорость, то скорость сократится и мы получим длину свободного пробега

$$\lambda = vp^{-1}(P) = \frac{\pi\Omega}{P},$$

где Ω — это пространство движения частицы (т.е. пространство, не занятое штырями), P — это периметр штырей.

В случае гармонического колебания границ стенка движется с фазой $\phi = \frac{2\pi t}{T}$. При условии, что период колебания стенки T подчиняется условиям таким, что он больше времени свободного пробега, но при этом смещение стенки мало по сравнению с длиной свободного пробега

$$\frac{\lambda}{v_0} \ll T \ll \frac{\lambda}{u_0}.$$

Ускорение частицы в результате ударов об стенки можно представить как случайный импульсный процесс, модулированный косинусом. Причем, импульсы идут все чаще, потому что скорость и частота ударов увеличиваются. Теперь вероятность столкновения зависит от скорости частицы относительно движущейся стенки

$$p(v, u, \phi) = \int_P (v \cos \phi + u) w(x, y, \phi) dl = \frac{P(v \cos \phi + u)}{2\pi\Omega} = \frac{v \cos \phi + u}{2\lambda}$$

Приращение скорости за период

$$\langle \Delta v_T \rangle = \int_0^T dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{v \cos \phi + u}{2\lambda} (2u_n \cos \phi_n + 2\frac{u_n^2}{v_n} \sin^2 \phi_n) d\phi_n.$$

Ненулевые только слагаемые с u_n^2

$$\langle \Delta v_T \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_0^T dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2u_n^2 \cos \phi_n + 2u_n^2 \sin^2 \phi_n \cos \phi_n) d\phi_n.$$

Усредняя по ϕ_n

$$\langle \Delta v_T \rangle = \frac{u_0^2}{\lambda} \left(2 + \frac{2}{3}\right) \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \frac{4Tu_0^2}{3\lambda}.$$

Тогда средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{4u_0^2}{3\lambda}t.$$

Получили что для периодического движения ускорения Ферми ровно в четыре раза больше чем для случайного. Видим, что от периода колебаний стенки результат не зависит. Итак, ускорение Ферми для случая гармонических колебаний границ

$$a_F = \frac{d}{dt} \langle v \rangle = \frac{4u_0^2}{3\lambda}.$$

Теперь предположим, что рассеиватели движутся хаотически (ϕ равномерно распределенная на $[0; 2\pi)$ фаза). Тогда средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{u_0^2}{3\lambda}t,$$

а ускорение Ферми принимает вид

$$a_F = \frac{d}{dt} \langle v \rangle = \frac{u_0^2}{3\lambda}.$$

5 Интересные закономерности

Наша демонстрация уникальна тем, что пользователь может проводить различные эксперименты, переключаясь из одной физической модели в другую при помощи большого числа параметров, описанных выше. В ходе тестирования авторы нашли несколько интересных зависимостей, об одной из которых хочется рассказать подробнее.

Рассматривая модель газа Лоренца с вышеуказанными исходными параметрами, установим **гармонический тип колебаний рассеивателей с коэффициентом упругости $K = 0.7$** . Тогда на графике можно заметить стабилизацию средней скорости частиц.

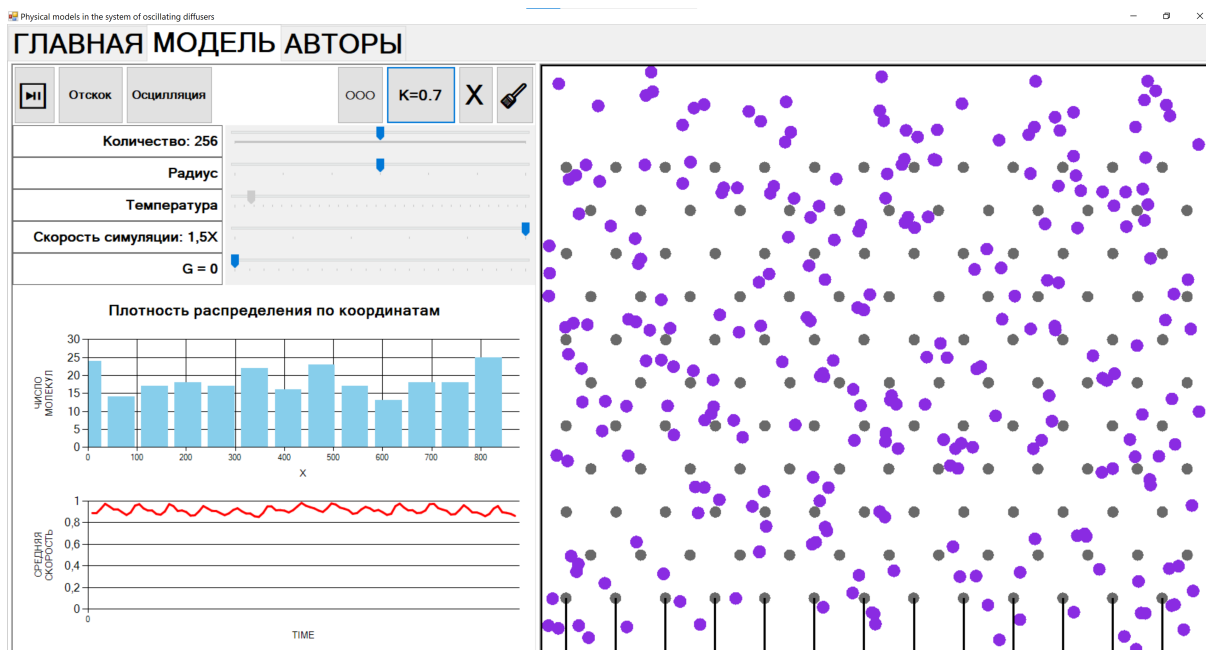


Рис. 15: Интересная закономерность в модели газа Лоренца

Таким образом, отмеченные факторы уравнивают друг друга в данной демонстрации. Система приходит в равновесное состояние, в котором тоже можно наблюдать распределение Больцмана, добавив незначительное притяжение (например, $G = 1$).

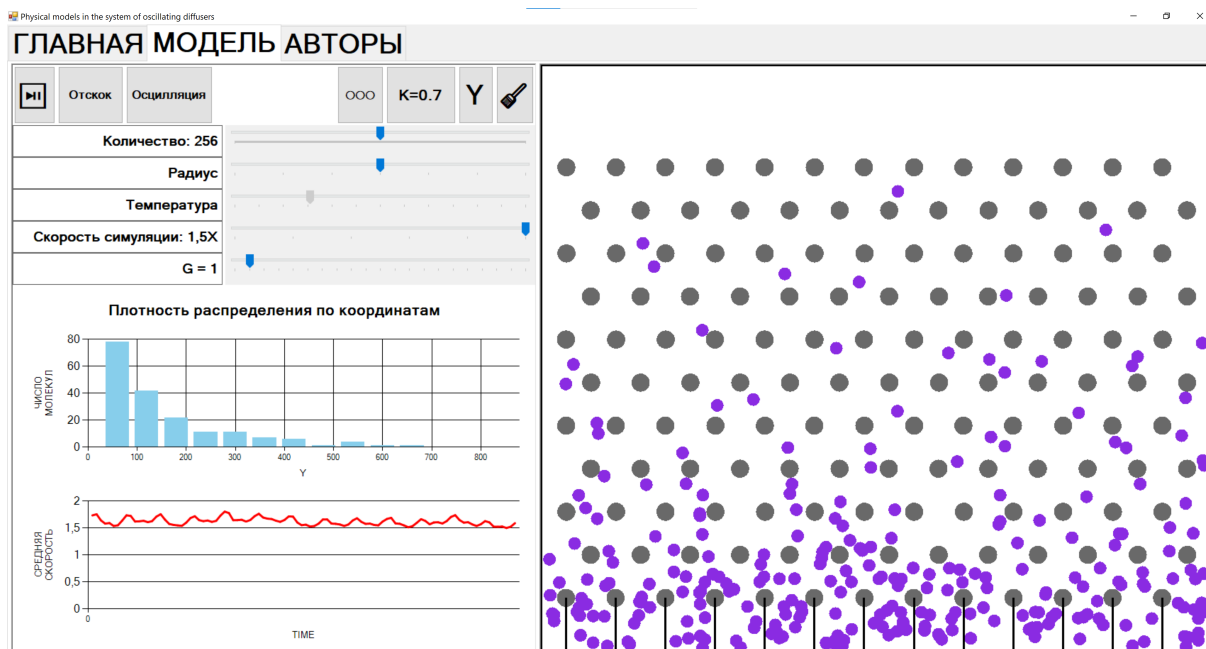


Рис. 16: Распределение Больцмана

Данная демонстрация погружает зрителя в мир статистической физики, показывая, как хаотическое движение молекул становится граничной точкой между наукой и искусством, вызывая успокаивающий и терапевтический эффект. Наблюдение за

три разноцветными молекулами с хаотично осциллирующими рассеивателями дарит ощущение, сравнимое с наблюдением за рыбками в мерцающей воде аквариума, что помогает снять стресс и задуматься о философских вопросах.



Рис. 17: Шарики-рыбки